MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. M. Schottenloher

1. März 2007

Zimmer 437

PROGRAMM zum PROSEMINAR

SOMMERSEMESTER 2007

⋄ ∞∞ ⋄ ∞∞∞ ⋄ ∞∞∞∞ ⋄ ∞∞∞∞∞ ⋄ ∞∞∞∞ ⋄ ∞∞∞ ⋄ ∞∞ ⋄

KNOTEN und FLÄCHEN

⋄ ∞∞ ⋄ ∞∞∞ ⋄ ∞∞∞∞ ⋄ ∞∞∞∞∞ ⋄ ∞∞∞∞ ⋄ ∞∞∞ ⋄ ∞∞ ⋄

Inhalt:

Ziel des Seminars ist es, eine elementare Darstellung einige wesentlicher Resultate über die Klassifikation von Knoten und von Flächen zu bieten. Dabei sollen möglichst wenig allgemeine mathematischen Grundlagen vorausgesetzt werden. Selbst die Topologie, die auf den ersten Blick unvermeidlich bei der Formulierung der Definitionen von Knoten und Flächen zu sein scheint, soll zunächst vermieden und später im Seminar eingeführt werden. Am Ende soll es möglich sein, die Hauptresultate (in der Knotentheorie: Jones-Polynom und andere Invarianten; in der Flächentheorie: Klassifikation) elementar kombinatorisch einerseits und topologisch andererseits zu verstehen.

Die Theorie der Flächen wie auch die Knotentheorie sind wichtige mathematische Disziplinen, die in der Regel in den Standardvorlesungen kaum behandelt werden oder (was die Flächen anbetrifft) einfach vorausgesetzt werden. Flächen kommen in der elementaren (algebraischen) Topologie vor, in der Funktionentheorie (als Riemannsche Flächen) und in der Algebraischen Geometrie als komplexe Kurven, sowie in in einigen Standardkonstruktionen wie z.B. der projektiven Ebene über $\mathbb{R}$. Aus diesem Grunde tauchen sie immer wieder in modernen Entwicklungen auf, obwohl ihre topologischen Eigenschaften den Mathematikern bereits seit mehr als 100 Jahren gut bekannt sind.

Auch das Studium der Knoten hat in der Mathematik eine lange Historie (vgl. [Ep] oder [So]). Ernsthaft und systematisch wurden Knoten von Tait vor 130 Jahren untersucht, einem Physiker, der sich auch mit der Flugbahn von Golfbällen auseinandergesetzt hat. Tait war auf der Suche nach einem Atommodell, das die Existenz des Äthers berücksichtigt (vor dem Rutherfordschen Atommodell). Von ihm und anderen (Lord Kelvin) wurde die Idee verfolgt, dass die Atome Verknotungen des Äthers seien. Aus diesem Grunde ging es zunächst einmal darum, vergleichsweise einfache Knoten zu beschreiben. Von Tait stammt die Tabelle von allen (Prim-) Knoten mit bis zu 10 Überkreuzungen, die wir im zweiten Vortrag zu sehen bekommen. Das angestrebte Atommodell hatte aber keine Zukunft, daher haben die Physiker erst einmal vom Studium der Knoten abgelassen. In der Mathematik wurden Knoten vor 110 Jahren von Wirtinger im Rahmen von Singularitäten von Nullstellengebilden holomorpher Funktionen in mehreren Veränderlichen studiert, von anderen Mathematikern danach im Rahmen der Grundlegung und Entwicklung der Topologie und der Gruppentheorie. Dann wurde es Mitte des letzten Jahrhunderts ruhig um die Knoten. Sie war eine Vorzeigedisziplin geworden, in der die Gebiete Topologie, Algebra und Geometrie eine fruchtbare Verbindung eingehen, und das auf einem vergleichsweise elementaren Niveau. In den Achtziger Jahren gab es einen Ruck, eine neue und effiziente Knoteninvariante, das Jones-Polynom, wurde entdeckt und ein neuer Zusammenhang zur Physik wurde hergestellt und ausgebaut (vgl. [At]), der sogar im Rahmen der Realisierung von Quantencomputern eine wichtige Rolle spielen könnte [Sch07]. Es ist also durchaus interessant, sich mit der Knotentheorie auseinanderzusetzen. Unter anderem auch, weil es in der Knotentheorie noch ungelöste Probleme gibt. Zum Beispiel die Beschreibung einer klassifizierenden kombinatorischen Invarianten oder ein geometrische Beweis der Existenz des Jones-Polynoms.

Im Seminar geht es nicht im die Historie, aber es geht unter anderem auch darum, zu beschreiben und zu erfahren, wie sich ein mathematische Theorie entwickelt und wandelt.

Keineswegs soll möglichst schnell ein hoher Abstraktionsgrad erreicht werden. Daher werden der Begriff des Knotens und der Begriff der Fläche rein kombinatorisch eingeführt. Und die Beweisführungen zu den Knoteninvarianten und zur Klassifikation der Flächen soll auch rein kombinatorisch geführt werden. (Das wird in [GP] wie auch in [Gr, Li] im Grundsatz so gehandhabt, allerdings nicht immer ganz klar getrennt von zusätzlichen Argumenten, weil der kombinatorische Weg manchmal ein wenig länglich erscheint.) Die Darstellung in [Sch94] ist darauf ausgerichtet, ganz ohne Topologie auszukommen, sie ist sogar so angelegt, dass ein interessierter Nichtmathematiker ihr folgen können soll.) Insbesondere sollen im Seminar die Begriffe Knoten als Polygonzug im $\mathbb{R}^3$ und der Begriff des Knotendiagramms zunächst auseinandergehalten werden.

Mit den Knotendiagrammen wird nach dem einführenden 1. Vortrag zunächst in drei weiteren Vorträgen 2. - 4. die Knotentheorie vorangetrieben. Dabei soll viel Wert auf die Begriffsbildungen gelegt werden. Dann wird die kombinatorische Flächentheorie bis zu Klassifikation und Beschreibung der relevanten Invarianten entwickelt. Vortrag 8 gibt anschließend eine Gesamtschau der bisher untersuchten Objekte aus dem Blickwinkel der Topologie. Und der neunte Vortrag bringt Knoten und Flächen zusammen. Diese 9 Vorträge sind in der Regel an je zwei Teilnehmer vergeben, und sie bilden den Kern des Proseminars.

Im Anschluss an die Einteilung dieser 9 Vorträge sind noch weitere Vorträge genannt, die fast alle unabhängig voneinander sind. Diese stehen zur freien Auswahl und bringen den Stoff voran: Wer einen dieser Vorträge, evtl. wieder zu zweit oder auch zu dritt halten möchte, möge mich bald darüber informieren. Diese Zusatzvorträge sind in keiner Weise obligatorisch.

Organisation

Die stichwortartige Beschreibung der Themen stellt jeweils einen Vorschlag dar, von dem auch abgewichen darf.

Zum erfolgreichen Seminarbesuch gehört auch die Teilnahme an den Vorträgen, die man nicht selber hält. Erwünscht ist auch eine Diskussion. Das bedeutet, dass jeder Vortragende so sicher in seinem Stoff stehen sollte, dass er Fragen aushält und beantworten kann.

Es ist im übrigen sinnvoll, sich die Themen der anderen Vorträge bei der Ausarbeitung des eigenen Vortrags klar zu machen und in die genannte Literatur hineinzuschauen. Nur dann ist es möglich die Beziehungen zwischen den Vorträgen und gemeinsame Aspekte entsprechend darzulegen.

Der Vortrag sollte in der Regel an der Tafel gehalten werden, Schaubilder aus dem Computer und Beispielrechnungen sind natürlich gute Ergänzungen. Ebenso Handouts. Wer welchen Teil des Vortrags übernimmt, entscheiden Sie selber. Beim Vortrag soll der/die Vortragende keine Aufzeichnungen in der Hand halten, sie/er soll also den Vortrag frei halten. Aufzeichnungen können auf dem Tisch zur Einsicht abgelegt werden. Bewertet wird in erster Linie die Vortragsleistung, zum Teil auch begleitendes Material, weniger dagegen eine Ausarbeitung.

Eine Ausarbeitung des Vortrags ist nicht erforderlich, wenn auch in manchen Fällen sinnvoll. Allerdings: Alle Teilnehmer müssen zwei Wochen vor ihrem Vortragstermin eine kurze Skizze des Vortrags vorlegen, in Form einer Gliederung, die beispielsweise 1 Seite ausmacht oder in Form eines Abstracts. Die ersten Skizzen sollte ich also zum 3.4.07 erhalten (per Mail, da ich nicht in München bin zwischen 23.3. und 16.4.).

Mit der Vorbereitung können und sollten Sie sofort beginnen. Zu Fragen können Sie mich gerne kontaktieren, im Büro, per Mail oder per Telefon (bis 22.3).

Zeit und Ort: Di 14 – 16 Uhr, HS B 045. Beginn: 17.April 2007.

Die einzelnen Vorträge

1. *Knoten als geschlossene Polygonzüge und ihre Äquivalenz. Der Begriff einer Invarianten.* [Florian Volk, Susanne Moll]

   Ein paar Beispiele als Start, evtl. unter Zuhilfenahme von Informationen aus dem Internet, wie z.B. `knotplot`. Der Begriff des Knotens als Äquivalenzklasse von geschlossenen Polygonzügen im $\mathbb{R}^3$, Äquivalenz durch Dreiecksbewegungen [Sch94]. Evtl.: Vergleich mit glatten und regulären Einbettungen der Kreislinie in $\mathbb{R}^3$ oder in $\mathbb{S}^3$. Viele weitere Beispiele [Ad], Historie [Ep] und Beispiele von Knoteninvarianten wie in [GP]. Aufgabe der Klassifikation.

2. *Knotendiagramme und ihre Äquivalenz* [Fritz Sterzer, Christoph Senjak]

   Äquivalenz durch Reidemeisterbewegungen (in [GP] und anderswo), Beispiele, weitere Beispiele von Invarianten [GP, ch. 1], Spiegelung, insbesondere beim Kleeblattknoten. Die Tabellen von Thomson und Tait.

3. *Kauffman-Klammer und Jones-Polynom* [Lisa Kraus, Maria Landskron]

   Zustandsmodelle, Kauffman-Klammer und Jones-Polynom wie in [GP], aber streng kombinatorisch [Ka, Sch94], Anwendungen, Homfly-Polynom und evtl. Alexanderpolynom, [GP, ch. 2].

4. *Projektion der Knoten auf die Ebene, Knoten als Zöpfe, Zopfgruppe* [Teodora Katsarova, Marin Genov]

   Satz: Zu jedem Knoten im $\mathbb{R}^3$ gibt es eine (sogar) lineare Projektion auf eine Ebene, so dass das Bild ein Knotendiagramm ist. Zwei Knoten sind genau dann äquivalent, wenn ihre Projektionen als Knotendiagramme äquivalent sind.

   Jeder Knoten kann zu einem Zopf erweitert werden. Beschreibung der Zopfgruppe (nur polygonale Zöpfe). Jeder Zopf definiert einen Knoten, und die gegenseitigen Konstruktionen sind surjektive Zuordnungen. (Das steht in vielen Abhandlungen z.B. in [So, Sch07] im Überblicksstil, in [PS] gründlich aber knapp.) In jedem Falle auch hier: Zöpfe setzen sich aus Polygonzügen zusammen, und die Äquivalenz muss kombinatorisch beschrieben werden. Dreiecksbewegungen!

5. *Flächen, Triangulierungen und kombinatorische Flächen, das zugehörige Polygon* [Tobias Boegelein, Michael Tuttas]

   Der Titel sagt fast alles (in [GP, 4.1] und anderswo). In jedem Falle auch die Beispiele Sphäre, projektive Ebene, Möbiusband und die geschlossenen Flächen mit g Henkeln. Eulerzahl: Invariant gegenüber Wechsel der Triangulierungen und Eulerzahl für die Beispiele. Konstruktion durch Identifikation der Kanten eines Polygons. Evtl.: Konstruktion des zu einer Fläche gehörigen Polygons [GP, p. 68/69]. Ist die Ebene eine Fläche?

6. *Klassifikation der Flächen* [Yini Qiu, Thomas Maier]

   Schneiden und Kleben, Normalform und Symbol einer Fläche [GP 4.2, Gr], elementarer noch in [Sch94]. Klassifikationssatz über Henkel, Kreuzhauben und Löcher. Verschiedene Darstellungen von Repräsentanten der Äquivalenzklassen von Flächen.

7. *Flächeninvarianten* [Johannes Flake, Yan Zhang]

   Randkomponenten, Orientierung, Eulerzahl und Geschlecht, rein kombinatorisch ([GP 4.3, 4.4]). Weitere Klassifikationssätze. Vergleich mit anderen Darstellungen.

8. *Topologische Räume, Zusammenhang, Isotopie* [Jana Fürchtenicht, Nicolaus Treib]

   Wir kennen bis dahin den Begriff des topologischen Raumes aus der Vorlesung MIIA. Dazu also nur ein kurzer Abriss wie in [GP 3.1,3.2] mit Zusammenhang [GP, 3.3] (oder aus anderen Quellen). Schwerpunkt: (ambiente) Isotopie von (zahmen) Knoten als Einbettungen der Kreislinie und Vergleich mit der bereits eingeführten Äquivalenz, andere Äquivalenzbegriffe bei Knoten [GP]. Analog für Knotendiagramme einerseits und Zöpfe andererseits. Vergleich: Äquivalenz von kombinatorischen Flächen und Homöomorphie.

9. *Geschlecht eines Knotens und Knotenarithmetik* [YiYi Li, Thomas Schacherer]

   Nach [GP, ch. 5].

10. *Fundamentalgruppe I, Homotopieäquivalenz, die Fundamentalgruppen der Flächen* [Ludwig Straub, Yilin Xu]

    Der Begriff der Homotopie, Vergleich mit Isotopie. Fundamentalgruppe mit Beispielen. Insbesondere die Fundamentalgruppen der Kreislinie und der geschlossenen Flächen [GP]. Evtl. ein kurzer Ausblick auf die Interpretation der Zopfgruppe als Fundamentalgruppe von Konfigurationsräumen (im zweidimensionalen Fall, vgl. z.B. die Hinweise in [Sch07]).

Weitere Vorschläge für Vorträge:

S.* *Präsentation von endlich erzeugten Gruppen, das Wortproblem* []

[GP]

T.* *Der Jordansche Kurvensatz* []

[Mo] und elementar für Polygonzüge in [Sch94]

V.* *Knotengruppe, Alexanderpolynom* []

[GP, Ka]

W.* *Fundamentalgruppe II, Berechnungen, Zopfgruppe* []

Satz von Seifert und van Kampen, [GP]. Die Zopfgruppe als Fundamentalgruppe des Konfigurationsraumes zu 2 Dimensionen. Weiteres zur Zopfgruppe in [PS].

X.* *Ansatz der topologischen Feldtheorie* []

Überblick dazu in [At].

Y.* *Überlagerungen, Decktransformationen* []

[GP] und anderswo.

Z.* *Vassiliev-Invarianten* []

[So, Vo]

In der Literaturliste sind viele Bücher genannt, die wir für die Vorträge nicht oder nur als Ergänzung benötigen. Das Seminar hält sich hauptsächlich an [GP], und mit diesem Buch kommt man auch fast aus. Ein teilweise ähnliche Darstellung findet sich in [Li] in Bezug auf Knoten und [Gra], [Gr] in Bezug auf Flächen. Anschauliches und Historisches zur Knotentheorie findet sich in [Ad] und [Ep], das gilt auch für [So] eine populärwissenschaftliche Darstellung. Weiterführende Bücher zur Knotentheorie sind [Ro] (ein Klassiker vor der Entdeckung der Jones-Polynome), [Ka] mit Bezug zur Physik und [BZ]. Zu speziellen Fragestellungen oder Ergebnissen der neueren Knotentheorie: [At, PS, Tu, Vo]. Weiterführendes zur Topologie der

Flächen wird in [Mo] dargestellt, zum Teil auch schon in [Gra]. Die beiden Artikel von mir sind nur als Ergänzung zu verstehen. In [Sch94] allerdings ist der elementare und kombinatorische Standpunkt durchgängig eingehalten.

Literatur

Ad Adams, C.: *The Knot Book.* AMS, 2004.

At Atiyah, M.: *Geometry and Physics of Knots.* Cambridge UP, 1990.

BZ Burde / Zieschang, H.: *Knots.* DeGruyter, 2003 (2. Auflage)

Ep Epple, M.: *Die Entstehung der Knotentheorie.: Kontexte und Konstruktionen einer modernen mathematischen Theorie.* Vieweg-Verlag, 1999.

GP Gilbert, N.D. / Porter, T.: *Knots and Surfaces. A guide to discovering mathematics.* Oxford Univ. Press, 1995.[1]

Gra Gramain, A.: *Topologie des surfaces.* 1971.

Gr Griffiths, H.B.: *Surfaces.* Cambridge Univ. Press, 1976.

Ka Kauffman, L.: *Knots and Physics.* World Scientific, 1991.

Li Livingston, C.: *Knotentheorie für Einsteiger.* Vieweg-Verlag, 1995.

Mo Moise, E.: Geometric Topology in Dimensions 2 and 3. Springer-Verlag, 1977.

PS Prasasoloband, V / Sossinsky, V.: *Knots, Links, Braids and 3-Manifolds.* AMS, 1997.

Ro Rolfsen, D.: *Knots and Links.* AMS, 1981.

Sch94 Schottenloher, M.: *Geheimwissenschaft Mathematik: Zahlen, Knoten und Flächen* Manuskript 1994, Preprintserie des Graduiertenkollegs LMU.[2]

Sch07 Schottenloher, M.: *Knoten zur Realisierung von Quantenrechnern* `mathe-lmu.de` **16** 2007, 23–32.[3]

So Sossinsky, V.: *Mathematik der Knoten* rororo, 2000.

Tu Turaev, V.: *Quantum Invariants of Knots and 3-Manifolds.* DeGruyter, 1994.

Vo Vogel, P.: *Vassiliev theory and the universal Lie algebra* Aarhus 2000, erhältlich unter `http://www.math.jussieu.fr/~vogel/`.

Martin Schottenloher

`Version 1.2 vom 7.3.7`

[1] Ich habe ein eigenes Exemplar, das ich verleihen kann. Oder ich deponiere es zur Einsichtnahme bei Frau Heinemann.

[2] Einige Kopien werden bereitgestellt, abzuholen ab 6.3. bei mir (ich bin allerdings nicht ständig im Büro) oder nachmittags bei Frau Heinemann.

[3] pdf-File wird auf Wunsch zugeschickt.